ANNALES

DES

POSTES, TÉLÉGRAPHES & TÉLÉPHONES

Supplément au N° 1 de la 2e année

FORMULES RELATIVES

AUX

Lignes Télégraphiques et à la Propagation du Courant

Par M. POMEY,

Ingénieur en Chef des Postes et Télégraphes,

Professeur à l'Ecole Supérieure des Postes et Télégraphes

A. DUMAS, ÉDITEUR,

6, rue de la Chaussée d'Antin,

PARIS

Digitized by Google

Digitized by Google

FORMULES RELATIVES

AUX

Lignes Télégraphiques et à la Propagation du Courant

Digitized by Google

Digitized by Google

ANNALES

DES

POSTES, TÉLÉGRAPHES & TÉLÉPHONES

Supplément au N° 1 de la 2e année

FORMULES RELATIVES

AUX

Lignes Télégraphiques et à la Propagation du Courant

Par M. POMEY,

Ingénieur en Chef des Postes et Télégraphes,

Professeur à l'École Supérieure des Postes et Télégraphes

A. DUMAS, ÉDITEUR,

6, rue de la Chaussée d'Antin,

PARIS

Digitized by Google

Digitized by Google

FORMULES RELATIVES

AUX

LIGNES TÉLÉGRAPHIQUES ET A LA PROPAGATION DU COURANT

Par M. POMEY, Ingénieur en chef des Postes et Télégraphes,
Professeur à l'École Supérieure des Postes et Télégraphes.

INTRODUCTION.

On trouvera dans les nos 1 et 2 (janvier et février 1907), du *Journal Télégraphique* publié à Berne par le bureau international des Administrations télégraphiques un article de M. le Dr G. Di Pirro, relatif au câble télégraphique et téléphonique du Simplon. L'auteur y donne la démonstration des formules relatives à l'état stationnaire des courants sinusoïdaux sur une ligne télégraphique formant un lacet dont l'extrémité est isolée ou bouclée. En même temps, il expose la méthode du pont de Wheatstone à fil divisé, employée avec l'aide du téléphone, pour déterminer simultanément la résistance et la capacité ou la self apparente du lacet. Il donne ensuite le résultat des mesures effectuées sur le câble télégraphique et téléphonique du Simplon.

D'autre part, ces formules et d'autres analogues sont intervenues fréquemment au cours de la conférence internationale des techniciens des Administrations des télégraphes et des téléphones réunie à Paris en 1910. On a constamment envisagé l'amortissement, la longueur d'onde, la caractéristique et l'on a donné de ces quantités tantôt les expressions complètes, tantôt des expressions approchées. Enfin, on a introduit les coefficients de réflexion et de transmission d'une onde au point de jonction de deux lignes homogènes.

Dans l'étude qui va suivre on a rappelé très sommairement les formules les plus usuelles et il sera facile de se rendre compte dans

Digitized by Google

chaque cas des hypothèses sur lesquelles les simplifications sont basées.

La détermination du nombre et de la position des maximums et des minimums de voltage efficace le long de la ligne est une question des plus difficiles ; bien souvent des erreurs ont été publiées à ce sujet. Nous croyons avoir suffisamment fait ressortir la complication du problème, en montrant combien peut être variable, suivant les conditions, le nombre des maxima et des minima effectifs et combien aussi il est malaisé de préciser des conditions un peu simples, dans lesquelles on puisse affirmer que le potentiel efficace à l'extrémité de la ligne est supérieur au potentiel efficace à l'origine. Ce sujet mériterait d'être approfondi.

Enfin dans les *Mitteilungen aus dem Telegraphen-Versuchsamt des Reichs-Postamts* (v. mai-février 1910) on trouve un intéressant article de M. le Dr K. W. Wagner, sur la manière dont les signaux télégraphiques s'écoulent sur les long câbles. L'auteur se borne à considérer un câble sans inertie magnétique ni perte latérale et les conditions limites sont choisies parmi celles où les exposants, racines de l'équation caractéristique, sont des quantités réelles. A ces calculs sont joints les résultats d'expériences très instructives qui rentrent dans ce cas. Nous avons essayé de tirer de la solution isochrone, si facile à obtenir dans le cas général, la solution applicable à l'établissement du courant dû à une f. e. m. constante sur une ligne primitivement au repos. Dans cette étude nous tenons compte des appareils intercalés aux deux extrémités de la ligne. Enfin, à titre de vérification, nous donnons une application à un cas connu.

Je me propose de résumer ci-après d'une façon aussi concise que possible un certain nombre de formules relatives aux constantes des lignes télégraphiques et à leur mesure : je m'occuperai spécialement des f. e. m. périodiques simples et je terminerai en donnant une formule relative à l'établissement d'un courant de pile, en supposant que les branches de transmission et de réception comportent à la fois résistance et self induction et sont coupées par des condensateurs. Au surplus, nous rappellerons que M. Poincaré a traité en 1903-1904 à l'Ecole Professionnelle Supérieure des Postes et Télégraphes la propagation en période variable du courant sur une ligne munie de

Digitized by Google

récepteur et qu'il y a lieu de se reporter à cette étude, si l'on veut approfondir la question.

1° Équations de la propagation.

Soient une ligne homogène et :

l la longueur de la ligne, ρ, γ, λ, σ la résistance, la capacité, la self induction, la conductibilité de la perte superficielle, par unité de longueur, V le potentiel et I l'intensité au point M situé à la distance x de l'origine de la ligne et à l'époque t ; E la f. e. m. de la branche de transmission, R_0 L_0 C_0, la résistance, la self induction et la capacité intercalées dans cette branche, R_1 L_1 C_1 les grandeurs analogues de la branche de réception, laquelle est mise à la terre à son extrémité (potentiel zéro).

Dans le cas où, au lieu d'une ligne télégraphique à simple fil, on considère une ligne téléphonique à double fil, V est la différence de potentiel, non plus entre le fil et la terre, mais entre les deux brins du circuit, à la distance x de l'origine, I est l'intensité dans l'un des deux brins, — I l'intensité dans l'autre brin ; ρ est la résistance du circuit par unité de longueur, c'est-à-dire la somme de la résistance du brin d'aller et du brin de retour entre les distances x et $x + 1$, γ est la capacité d'un brin par rapport à l'autre, la self induction correspond au flux embrassé par le circuit, la perte superficielle est due au défaut d'isolement d'un brin par rapport à l'autre et on néglige la perte du circuit par rapport à la terre.

La loi d'ohm généralisée donne :

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = \rho I + \lambda \frac{\partial I}{\partial t}$$

La loi de continuité donne :

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = \gamma \frac{\partial V}{\partial t} + \sigma V.$$

Soient I_0 et V_0, I_1 et V_1 ce que deviennent I et V pour $x = o$ et $x = l$ respectivement ; dans la branche de pile, on aura :

$$\frac{\partial (E - V_0)}{\partial t} = R_0 \frac{\partial I_0}{\partial t} + L_0 \frac{\partial^2 I_0}{\partial t^2} + \frac{1}{C_0} I_0$$

Digitized by Google

Dans la branche du récepteur, on aura :

$$-\frac{\partial V_1}{\partial t} = R_1 \frac{\partial I_1}{\partial t} + L_1 \frac{\partial^2 I_1}{\partial t^2} + \frac{1}{C_1} I_1.$$

Telles sont les équations du problème.

Force électromotrice harmonique simple, régime permanent.

Soit $E = E_0 e^{i\omega t}$, E_0 étant une constante. Si N est le nombre de vibrations complètes à la seconde et T la durée de la période, on aura :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N.$$

Nous poserons :

$$Z_0 = R_0 + \left(L_0 \omega - \frac{1}{C_0 \omega}\right) i$$

$$Z_1 = R_1 + \left(L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega}\right) i$$

$$r = \rho + \lambda \omega i \qquad a = \sqrt{rs} \qquad r = aZ$$

$$s = \sigma + \gamma \omega i \qquad Z = \sqrt{\frac{r}{s}} \qquad s = \frac{a}{Z}$$

Les équations ci-dessus deviendront :

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = rI \qquad -\frac{\partial I}{\partial x} = sV$$

$$E_0 - V_0 = Z_0 I_0 \qquad V_1 = Z_1 I_1$$

et la solution du régime périodique permanent sera :

$$V = \frac{E_0 Z}{\Delta}\left(Z \sinh a(l-x) + Z_1 \cosh a(l-x)\right)$$

$$I = \frac{E_0}{\Delta}\left(Z \cosh a(l-x) + Z_1 \sinh a(l-x)\right)$$

Digitized by Google

avec :

$$\Delta = (Z^2 + Z_0 Z_1) \sinh al + Z (Z_0 + Z_1) \cosh al.$$

II. — Les courants et les potentiels $V_0 I_0$ au départ et $V_1 I_1$ à l'arrivée sont donnés par les formules :

$$V_0 = \frac{E_0 Z}{\Delta} (Z \operatorname{sh} al + Z_1 \operatorname{ch} al) \quad V_1 = \frac{E_0 Z Z_1}{\Delta}$$

$$I_0 = \frac{E_0}{\Delta} (Z \operatorname{ch} al + Z_1 \operatorname{sh} al) \quad I_1 = \frac{E_0 Z}{\Delta}$$

Lignes courtes : $\operatorname{sh} al = al$, $\operatorname{ch} al = 1$; on a :

$$\Delta = Z (Z_0 + Z_1) + (Z^2 + Z_0 Z_1) al$$

$$I_1 = \frac{E_0}{Z_0 + Z_1} \left(1 - al \frac{Z^2 + Z_0 Z_1}{Z (Z_0 + Z_1)}\right)$$

Lignes longues : $\operatorname{sh} al = \operatorname{ch} al = \frac{1}{2} e^{al}$; on a :

$$\Delta = \frac{e^{al}}{2} (Z + Z_0) (Z + Z_1)$$

$$I_1 = \frac{2 E_0 Z e^{-al}}{(Z + Z_0) (Z + Z_1)}$$

III. — *Mesures à effectuer sur les lignes.*

Je pose :

$$\frac{V_0}{I_0} = R + L\omega i$$

L pouvant être susceptible d'avoir une valeur négative ; $R + L\omega i$ est l'impédance mesurée à l'origine de la ligne.

On aura, d'une façon générale :

$$R + L\omega i = Z. \frac{Z \operatorname{sh} al + Z_1 \operatorname{ch} al}{Z \operatorname{ch} al + Z_1 \operatorname{sh} al}.$$

Digitized by Google

Cette formule devient pour une ligne courte :

$$R + L\omega i = Z_1 + \left(Z - \frac{Z_1^2}{Z}\right) al$$

et pour une ligne longue :

$$R + L\omega i = Z.$$

Soient $(R)_0$ et $(L)_0$ ce que deviennent R et L quand on fait $Z_1 = o$
$(R)_\infty$ et $(L)_\infty$ ce que deviennent R et L quand on fait $Z_1 = \infty$.

1°) On aura, d'une façon générale, en faisant $Z_1 = o$

$$(R)_0 + (L)_0\, \omega i = Z \operatorname{tgh} al$$

et dans le cas de la ligne courte :

$$(R)_0 + (L)_0\, \omega i = \rho l + \lambda l \omega i$$

De même, on aura dans le cas de la ligne longue :

$$(R)_0 + (L)_0\, \omega i = Z = \sqrt{\frac{\rho + \lambda \omega i}{\sigma + \gamma \omega i}}.$$

2°) On aura, d'une façon générale, en faisant $Z_1 = \infty$

$$(R)_\infty + (L)_\infty\, \omega i = Z \operatorname{coth}. al$$

soit, dans le cas de la ligne courte :

$$(R)_\infty + (L)_\infty\, \omega i = Z \times \frac{1}{al} = \frac{\sigma - \gamma \omega i}{\sigma^2 + \gamma^2 \omega^2} \times \frac{1}{l}$$

et dans le cas de la ligne longue :

$$(R)_\infty + (L)_\infty\, \omega i = Z$$

3°) On aura donc, d'une façon générale :

$$(R + L\omega i)_{Z_1 = 0} \times (R + L\omega i)_{Z_1 = \infty} = Z^2$$

et

$$(R + L\omega i)_{Z_1 = 0} : (R + L\omega i)_{Z_1 = \infty} = th^2\, al.$$

Digitized by Google

L'expérience donne les valeurs de $R + L\omega i$; le calcul donnera Z et a par les formules précédentes.

4°) Si on a : $Z_1 = Z$, il vient, quel que soit l,

$$R + L\omega i = Z.$$

et si Z_1 est peu différent de Z

$$R + L\omega i = Z\left(1 + 2 \cdot \frac{Z_1 - Z}{Z_1 + Z} e^{-2al}\right).$$

5°) Si la ligne est courte, on a :

$$al = \sqrt{\frac{(R)_0 + (L)_0 \omega i}{(R)_\infty + (L)_\infty \omega i}}$$

$$\rho l = (R)_0 \qquad \lambda l = (L)_0$$

$$\sigma l = \frac{(R)_\infty}{(R)_\infty^2 + (L)_\infty^2 \omega^2} \qquad \gamma l = \frac{-(L)_\infty}{(R)_\infty^2 + (L)_\infty^2 \omega^2}$$

6°) Dans le cas particulier où la ligne est parfaitement isolée, ces formules deviendront :

$$(R)_\infty = 0 \qquad \gamma l = \frac{-1}{(L)_\infty \omega^2}.$$

IV. — *Calcul de* a *et de* Z.

§ 1. Calcul de a.

Je pose : $a = m + ni$. Si on change a en $-a$ et Z en $-Z$, les expressions de V et de I ne changent pas. On peut donc choisir le signe qu'on veut. Choisissons le signe qui rend m positif il vient aussi pour n une valeur positive et l'on a :

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\rho\sigma - \lambda\gamma\omega^2 + \sqrt{\rho^2 + \omega^2\lambda^2}\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\gamma^2}}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\rho\sigma + \lambda\gamma\omega^2 + \sqrt{\rho^2 + \omega^2\lambda^2}\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\gamma^2}}$$

**

Digitized by Google

Cas particuliers: on néglige les carrés de $\frac{\omega\lambda}{\rho}$ et $\frac{\omega\gamma}{\sigma}$; il vient:

$$m = \sqrt{\rho\sigma}\left(1 + \frac{\omega^2}{8\rho\sigma}\left(\gamma\sqrt{\frac{\rho}{\sigma}} - \lambda\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}\right)^2\right)$$

$$n = \frac{1}{2}\omega\lambda\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} + \frac{1}{2}\omega\gamma\sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}$$

On néglige les carrés de $\frac{\rho}{\omega\lambda}$ et de $\frac{\omega\gamma}{\sigma}$; il vient:

$$m = \sqrt{\frac{\omega\lambda\sigma}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\omega\lambda} - \frac{\omega\gamma}{\sigma}\right)\right)$$

$$n = \sqrt{\frac{\omega\lambda\sigma}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\omega\lambda} - \frac{\omega\gamma}{\sigma}\right)\right)$$

On néglige les carrés de $\frac{\rho}{\omega\lambda}$ et de $\frac{\sigma}{\omega\gamma}$; il vient:

$$m = \frac{1}{2}\rho\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$$

$$n = \omega\sqrt{\lambda\gamma}\left(1 + \frac{1}{8\omega^2\lambda\gamma}\left(\rho\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}} - \sigma\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}\right)^2\right)$$

On néglige les carrés de $\frac{\omega\lambda}{\rho}$ et de $\frac{\sigma}{\omega\gamma}$, il vient:

$$m = \sqrt{\frac{\rho\gamma\omega}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\gamma\omega} - \frac{\lambda\omega}{\rho}\right)\right)$$

$$n = \sqrt{\frac{\rho\gamma\omega}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\gamma\omega} - \frac{\lambda\omega}{\rho}\right)\right)$$

Cas particuliers spéciaux

1°) Ligne à forte self, isolement parfait :

$$m = \frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}$$

$$n = \omega\sqrt{\lambda\gamma}$$

Digitized by Google

2°) Ligne à faible self, isolement parfait :

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \gamma \rho} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega \lambda}{\rho}\right)$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \gamma \rho} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega \lambda}{\rho}\right)$$

3°) Ligne sans déformation ; on appelle ainsi une ligne où l'on a $\gamma \rho = \lambda \sigma$.

$$m = \rho \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}$$

$$n = \omega \sqrt{\lambda \gamma}$$

Dans ce cas, comme dans celui de la ligne à forte self et à isolement parfait, m est indépendant de ω.

§ 2. Calcul de Z.

Posons $Z = p + q\sqrt{-1}$. Calculons p et q. On aura :

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \gamma^2 \omega^2}} \cdot \sqrt{\sigma\rho + \omega^2 \gamma\lambda + \sqrt{\rho^2 + \omega^2 \lambda^2}\sqrt{\sigma^2 + \omega^2 \gamma^2}}$$

$$q = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \gamma^2 \omega^2}} \cdot \sqrt{-\sigma\rho - \omega^2 \gamma\lambda + \sqrt{\rho^2 + \omega^2 \lambda^2}\sqrt{\sigma^2 + \omega^2 \gamma^2}}$$

avec le signe + pour q si $\lambda\sigma - \gamma\rho$ est positif et le signe — dans le cas contraire.

D'où :

$$\text{mod } Z = \sqrt[4]{\frac{\rho^2 + \lambda^2 \omega^2}{\sigma^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

$$\text{arg. } Z = \text{arctg. } \omega \frac{-\rho\gamma + \sigma\lambda + \gamma\sqrt{\rho^2 + \lambda^2\omega^2} - \lambda\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\gamma^2}}{\rho\sigma + \lambda\gamma\omega^2 - \sigma\sqrt{\rho^2 + \lambda^2\omega^2} - \rho\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\gamma^2} + \sqrt{\rho^2 + \omega^2\lambda^2}\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\gamma^2}}$$

ou encore, formule équivalente :

$$\text{arg. } Z = \text{arctg. } \frac{1}{\omega} \cdot \frac{-\rho\sigma - \lambda\gamma\omega^2 + \sqrt{\rho^2 + \lambda^2\omega^2}\sqrt{\sigma^2 + \gamma^2\omega^2}}{\lambda\sigma - \gamma\rho}$$

Cas particuliers. Soit pour abréger : $\varphi = \text{arg } Z$; nous dirons que la capacité et le self induction sont faibles, si on peut négliger, dans

Digitized by Google

le développement de $\sqrt{\rho^2 + \omega^2\lambda^2}$ et $\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\gamma^2}$, les carrés de $\frac{\omega\lambda}{\rho}$ et de $\frac{\omega\gamma}{\sigma}$; nous dirons qu'elles sont faibles, si on peut négliger, dans les développements respectifs, les carrés de $\frac{\rho}{\omega\lambda}$ et de $\frac{\sigma}{\omega\gamma}$. On a alors le tableau suivant :

Valeurs de tg φ

		Capacité forte	Capacité faible
Self induction	forte	$\frac{1}{2\omega}\left(\frac{\sigma}{\gamma} - \frac{\rho}{\lambda}\right)$	$1 - \frac{\rho}{\lambda\omega} - \frac{\gamma\omega}{\sigma}$
	faible	$-1 + \frac{\lambda\omega}{\rho} + \frac{\sigma}{\gamma\omega}$	$\frac{\omega}{2}\left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{\gamma}{\sigma}\right)$

Pour les lignes parfaitement isolées, on a $\sigma = 0$

$$\text{mod } Z = \frac{\sqrt[4]{\rho^2 + \lambda^2\omega^2}}{\sqrt{\omega\gamma}}$$

$$\text{tg } \varphi = -\frac{\rho}{2\omega\lambda} \text{ si la self est forte}$$

$$\text{ou tg } \varphi = -1 + \frac{\lambda\omega}{\rho} \text{ si la self est faible.}$$

Dans le cas des câbles parfaitement isolés, on a $\sigma = 0$, $\lambda = 0$ d'où :

$$\text{mod } Z = \sqrt{\frac{\rho}{\omega\gamma}} \qquad \varphi = -45^\circ$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho}{\omega\gamma}} \qquad q = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho}{\omega\gamma}}.$$

V. — *Signification physique de* m *et* n.

1° Je pose $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\Lambda = \frac{2\pi}{n}$. L'expression de V prend la forme :

$$V = \frac{E_0 Z}{\Delta}\left(\frac{Z + Z_1}{2} e^{m(t-x)} e^{2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{t-x}{\Lambda}\right)i} + \frac{Z_1 - Z}{2} e^{-m(t-x)} e^{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{t-x}{\Lambda}\right)i}\right)$$

Digitized by Google

Considérons l'exponentielle $e^{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\Lambda}\right)i}$. Portons notre attention sur les points, où cette exponentielle reprend la même valeur. On aura, en ces points :

$$\frac{t}{T} - \frac{x}{\Lambda} = \text{constante},$$

d'où :

$$\frac{dt}{T} - \frac{dx}{\Lambda} = 0.$$

Ils paraîtront donc se déplacer avec une vitesse $\frac{dx}{dt}$ égale à $\frac{\Lambda}{T}$.

Cette vitesse est une vitesse de propagation. La propagation a lieu en partant de l'origine jusqu'à l'extrémité de la ligne. Cette vitesse est constante. Au temps t, l'exponentielle, considérée comme fonction de x, reprend la même valeur en deux points x', x'' tels que $x'' - x'$ soit un multiple de Λ. Donc Λ est la longueur d'onde. En ce point x, l'exponentielle, considérée comme fonction de t, reprend la même valeur à deux époques t' et t'', telles que $t'' - t'$ soit un multiple de T. Donc T est la période. Cette exponentielle représente une onde directe.

L'exponentielle considérée est affectée, dans l'expression de V, par le facteur e^{-mx}, variable avec x, qui a pour effet d'affaiblir l'onde considérée suivant une loi exponentielle en raison du chemin parcouru.

Considérons maintenant le second terme de l'expression de V. On verrait de même qu'il représente une onde qui se propage dans le sens rétrograde avec la même vitesse constante et en s'affaiblissant suivant la même loi exponentielle, en raison du chemin $l - x$ parcouru depuis l'extrémité de la ligne.

On peut donc dire qu'il y a une onde directe et une onde réfléchie, toutes deux amorties ; m est un exposant d'affaiblissement avec la distance, $\frac{n}{2\pi}$ est le nombre de longueurs d'ondes contenu dans l'unité de longueur.

Digitized by Google

2° On peut considérer aussi le potentiel comme dû à la superposition d'une infinité d'ondes réfléchies aux deux extrémités suivant une loi déterminée. On a, en effet,

$$V = E_0\, e^{i\omega t}.\, Z.\, \frac{(Z + Z_1)\, e^{a(l-x)} + (Z_1 - Z)\, e^{-a(l-x)}}{(Z + Z_0)(Z + Z_1)\, e^{al} + (Z_1 - Z)(Z - Z_0)\, e^{-al}}.$$

et en développant en série :

$$V = E_0\, e^{i\omega t} \frac{Z}{Z + Z_0} e^{-ax} (1 + k e^{-2al} + k^2 e^{-4al} + \ldots + k^n e^{-2nal} + \ldots)$$

$$+ E_0 e^{i\omega t} \frac{Z}{Z + Z_0} \cdot \frac{Z_1 - Z}{Z_1 + Z} \cdot e^{-a(2l-x)} (1 + k e^{-2al} + k^2 e^{-4al} + \ldots + k^n e^{-2nal} + \ldots).$$

avec $$k = \frac{(Z - Z_1)(Z - Z_0)}{(Z + Z_1)(Z + Z_0)}.$$

L'onde $E_0\, e^{i\omega t} \frac{Z}{Z + Z_0} e^{-ax}$ arrive au point $x = l$ avec la valeur $E_0\, e^{i\omega t} \frac{Z}{Z + Z_0} e^{-al}$, elle y éprouve la modification qui résulte de la multiplication par le facteur $\frac{Z_1 - Z}{Z_1 + Z}$ et elle revient en arrière sous la forme $E_0\, e^{i\omega t} \frac{Z}{Z + Z_0} \cdot \frac{Z_1 - Z}{Z_1 + Z} \cdot e^{-al} \times e^{-a(l-x)}$, qui représente le premier terme de la série formant la seconde ligne de l'expression de V.

L'onde $E_0\, e^{i\omega t} \cdot \frac{Z}{Z + Z_0} \frac{Z_1 - Z}{Z_1 + Z} e^{-a(2l-x)}$ arrive à l'origine $x = o$ avec la valeur $E_0\, e^{i\omega t} \frac{Z}{Z + Z_0} \frac{Z_1 - Z}{Z_1 + Z} e^{-2al}$ et y subit la modification qui résulte de la multiplication par le facteur $-\frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$. Il en résulte l'onde directe $E_0\, e^{i\omega t} \cdot \frac{Z}{Z + Z_0} \cdot k e^{-2al} \cdot e^{-ax}$, qui forme le second terme de la première série dans le développement de V. Cette onde peut être considérée comme donnant naissance à son tour à l'onde

Digitized by Google

rétrograde $E_0 e^{i\omega t} \cdot \frac{Z}{Z+Z_0} \cdot \frac{Z_1 - Z}{Z_1 + Z} \cdot k \cdot e^{-3al} \cdot e^{-a(l-x)}$ et ainsi de suite. Chaque onde réfléchie se forme en multipliant l'onde incidente par le facteur $\frac{Z_1 - Z}{Z_1 + Z} e^{-a(l-x)}$ quand elle arrive à l'extrémité et par le facteur $-\frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} e^{-ax}$, quand elle revient à l'origine.

3° Variation du voltage efficace aux divers points de la ligne.

1° Le voltage efficace peut-il être plus élevé à l'extrémité de la ligne qu'à l'origine ?

On a :

$$\frac{V_1}{V} = \frac{Z_1}{Z \operatorname{sh} al + Z_1 \operatorname{ch} al}.$$

Dans quel cas aura-t-on,

$$\operatorname{mod}(Z_1) > \operatorname{mod}(Z \operatorname{sh} al + Z_1 \operatorname{ch} al) ?$$

La discussion complète serait compliquée.

Mais supposons que l'on ait :

$$\operatorname{mod}^2 Z_1 > \operatorname{mod}(Z_1 - Z) \operatorname{mod}(Z_1 + Z)$$

ce qui suppose que l'affixe de Z_1 est du côté opposé à l'origine par rapport à l'hyperbole représentée par l'équation

$$\operatorname{mod}^2 Z_1 = \operatorname{mod}(Z_1 - Z) \operatorname{mod}(Z_1 + Z)$$

où Z est un vecteur donné et $Z_1 = X + Yi$ l'affixe variable.

On aura alors :

$$2 \operatorname{mod} Z_1 > | Z_1 + Z | e^{ml} + | Z_1 - Z | e^{-ml}.$$

pourvu que l ait la valeur qui rend le second membre minimum, c'est-à-dire si on a :

$$e^{2ml} = \left| \frac{Z_1 - Z}{Z_1 + Z} \right|.$$

Digitized by Google

Mais on a aussi :

$$| Z_1 + Z | e^{ml} + | Z_1 - Z | e^{-ml} > | (Z_1 + Z) e^{al} + (Z_1 - Z) e^{-al} |$$

parce que la somme des modules est plus grande que le module de la somme. Donc Z_1 étant choisi ; ainsi que l, en fonction de Z et m, comme il vient d'être dit, on sera sûr d'avoir :

$$| Z_1 | > | \frac{Z_1 + Z}{2} e^{al} + \frac{Z_1 - Z}{2} e^{-al} |$$

ou : $$\text{mod } V_1 > \text{mod } V.$$

2° Si on considère une ligne courte, on aura :

$$\text{mod } V_1 > \text{mod } V, \text{ si on a :}$$

$$\text{mod } Z_1 > \text{mod } (Z_1 + Z a. l)$$

Posons $Z_1 = R_1 - \frac{1}{C_1 \omega}$, cette condition donne :

$$C_1 < \frac{2\lambda l}{\rho^2 l^2 + \lambda^2 l^2 . \omega^2 + 2\rho l . R_1}$$

3° Supposons maintenant la ligne très longue. Cette hypothèse signifie que l'on peut négliger e^{-ml} devant e^{ml} et la condition mod $V_1 >$ mod V devient :

$$\text{mod } Z_1 > \text{mod } (Z + Z_1) . \frac{1}{2} e^{ml}$$

Or on a : $Z = p + qi$ avec $q^2 < p^2$; posons $Z_1 = x + yi$; une valeur de Z_1 ne peut être admissible que si on a $x > o$. Soit μ le rapport de mod Z_1 à mod $(Z + Z_1)$. On aura :

$$x^2 + y^2 = \mu^2 [(x + p)^2 + (y + q)^2]$$

Si μ est grand, le point (x, y) décrit un petit cercle entourant le point $x = -p$, $y = -q$; et l'abscisse d'aucun de ses points n'est positive. Pour que x puisse être positif, il faut que μ^2 prenne la

Digitized by Google

valeur $\frac{p^2+q^2}{p^2}$ ou lui soit inférieur. En ce cas on aura à fortiori $\mu^2 < 2$ et par suite $\frac{1}{4}e^{2ml} < 2$ ou $e^{2ml} < 8$. Mais, lorsque l'on pourra négliger e^{-ml} devant e^{ml}, le rapport de ces deux quantités sera en général inférieur à celui de 1 à 8 et par suite il n'y aura pas de valeur de Z_1 qui permette d'avoir mod $V_1 >$ mod V. Donc, dans le cas de lignes d'une certaine longueur, le potentiel efficace à l'arrivée sera toujours inférieur au potentiel efficace existant à l'origine. Il ne faut pas oublier que l'intercalation d'appareils de mesure peut, dans certains cas, modifier considérablement le régime.

VI. — Variation du voltage aux divers points de la ligne.

Nous considérons seulement le voltage efficace et nous l'envisageons comme fonction de x. Nous nous bornons à deux cas particuliers extrêmes :

1°) Soit $n = o$. Posons $Z + Z_1 = 2M e^{i\varphi}$, $Z_1 - Z = 2M' e^{i\varphi'}$ le carré du module de V est proportionnel, d'une façon générale, à

$$M^2 e^{2m(l-x)} + M'^2 e^{-2m(l-x)} + 2MM' \cos(\varphi - \varphi' + 2n(l-x))$$

et pour $n = o$, à :

$$M^2 e^{2m(l-x)} + M'^2 e^{-2m(l-x)} + 2MM' \cos(\varphi - \varphi')$$

expression dont le minimum est

$$2MM'(1 + \cos(\varphi - \varphi'))$$

pour

$$\frac{M}{M'} = e^{-2m(l-x)}$$

Comme x est compris entre o et l, ce minimum n'aura lieu que si on a :

$$m > \frac{1}{2l} \log \frac{M}{M'}.$$

2°) L'autre cas extrême est celui où l'on a : $m = o$.

Digitized by Google

Dans ce cas, on a une série alternée de maxima et de minima distants de $\frac{1}{4}\Lambda$, en nombre plus ou moins grand suivant que $\frac{1}{4}\Lambda$ se trouve contenu un nombre de fois plus ou moins grand dans l.

Dans les cas intermédiaires, on aura un nombre d'oscillations plus ou moins grand.

3° Pour que le voltage efficace soit croissant avec x en un point quelconque il faut que l'on ait :

$$-2m\,M^2 e^{2m(l-x)} + 2m\,M'^2 e^{-2m(l-x)} + 2n.2\,MM' \sin[\varphi - \varphi' + 2n(l-x)] > o$$

C'est en M, M' un trinôme homogène du second degré à racines réelles et de signes contraires. Pour que l'inégalité ait lieu, il faut que $\frac{M'}{M}$ soit plus grand que la plus grande racine. Ces conditions ne paraissent présenter aucune particularité remarquable.

VII. — Ligne composée de plusieurs lignes homogènes raccordées à la suite les unes des autres.

1°) Je distinguerai les constantes qui se rapportent à la seconde ligne en les désignant par les mêmes lettres affectées d'un accent. De cette façon Z'_1 sera l'impédance de la branche réceptrice, tandis que Z_1 désignera l'impédance de la branche réceptrice relative à la première ligne, c'est-à-dire d'une branche constituée par l'ensemble de la seconde ligne et de la branche réceptrice Z'_1 proprement dite.

On aura, alors, en un point x de la première ligne :

$$V = \frac{E}{\Delta'}\left[Z(Z'c' + Z'_1 s')s_x + Z'(Z's' + Z'_1 c')c_x\right]$$

$$I = \frac{E}{\Delta' Z'}\left[Z(Z'c' + Z'_1 s')c_x + Z'(Z's' + Z'_1 c')s_x\right]$$

en posant :

$$c = ch\,al \qquad c' = ch\,a'l' \qquad c_x = ch\,a(l-x)$$

$$s = sh\,al \qquad s' = sh\,a'l' \qquad s_x = sh\,a(l-x).$$

$$\Delta' Z = ZZ'(Zsc' + Z's'c) + ZZ'_1(Zss' + Z'cc') + Z_0 Z'(Zcc' + Z'ss') + Z_0 Z'_1(Zcs' + Z'c's)$$

Digitized by Google

Si, de plus, on écrit de même :

$$c'_{x'} = ch\, a'(l' - x')$$
$$s'_{x'} = sh\, a'(l' - x')$$

on aura pour un point x' de la seconde ligne :

$$V' = \frac{E\,Z'}{\Delta'}\left[Z'\, s'_{x'} + Z'_1\, c'_{x'}\right]$$
$$I' = \frac{E}{\Delta'}\left[Z'\, c'_{x'} + Z'_1\, s'_{x'}\right]$$

2°) Loi de réciprocité. Soit I'_1 le courant produit dans Z'_1 par la f. e. m. E placée dans Z_0. Plaçons E dans Z'_1 et soit J'_1 le courant produit dans Z_0. Je dis que l'on a $I'_1 = J'_1$.

Pour le voir, il suffit de remarquer que l'expression de I'_1 ne change pas si l'on permute $l\ a\ Z\ c\ s$ respectivement avec $l'\ a'\ Z'\ c'\ s'$ et Z'_1 avec Z_0.

3°) Addition des arguments pour les lignes ayant même caractéristique Z.

Si l'on suppose $Z = Z'$ et qu'on adopte la notation ci-après :

$$c_1 = ch\,(al + a'\,l') = cc' + ss'$$
$$s_1 = sh\,(al + a'\,l') = sc' + cs'$$

Les formules qui donnent V et I deviennent :

$$V = \frac{E\,Z}{\Delta_1}\left[Z\, sh\,(a'\,l' + a\,(l - x)) + Z'_1\, ch\,(a'\,l' + a\,(l - x))\right]$$

$$I = \frac{E}{\Delta_1}\left[Z\, ch\,(a'\,l' + a\,(l - x)) + Z'_1\, sh\,(a'\,l' + a\,(l - x))\right]$$

avec :

$$\Delta_1 = (Z^2 + Z_0\, Z'_1)\, s_1 + Z\,(Z_0 + Z'_1)\, c_1$$

et l'on a aussi :

$$V' = \frac{E\,Z}{\Delta_1}\left[Z\, sh\, a'(l' - x') + Z'_1\, ch\, a'(l' - x')\right]$$

$$I' = \frac{E}{\Delta_1}\left[Z\, ch\, a'(l' - x') + Z'_1\, sh\, a'(l' - x')\right]$$

Digitized by Google

Pour $x' = l'$, le courant I′ à l'arrivée a pour expression :

$$I' = \frac{EZ}{\Delta_1}$$

expression toute semblable à celle : $I = \frac{EZ}{\Delta}$ du courant à l'arrivée dans une ligne homogène, sauf que l'argument al est remplacé par $al + a'l'$.

4°) Les formules relatives à trois lignes homogènes raccordées bout à bout sont les suivantes, en accentuant d'un double accent les grandeurs relatives à la troisième ligne, de sorte que $a\ Z\ l$, $a'\ Z'\ l'$, $a''\ Z''\ l''$ caractérisent respectivement les trois tronçons :

On aura pour le premier tronçon :

$$V = \frac{E\,Z}{\Delta}\Big\{ Z[Z''(Z'c'c'' + Z''s's'') + Z_1''(Z's''c' + Z''c''s')]\,sha(l-x)$$
$$+ Z'[Z''(Z'c''s' + Z''c's'') + Z_1''(Z's's'' + Z''c'c'')]\,cha(l-x)\Big\}$$

pour le 2e tronçon :

$$V' = \frac{E\,Z\,Z'}{\Delta}\Big\{ Z'(Z''c'' + Z_1''s'')\,sha'(l'-x') + Z''(Z''s'' + Z_1''c'')$$
$$cha'(l'-x')\Big\}$$

et pour le 3e :

$$V'' = \frac{E\,Z\,Z'\,Z''}{\Delta}\Big\{ Z''\,sha''(l''-x'') + Z_1''\,cha''(l''-x'')\Big\}$$

avec

$$\Delta = Z\,Z''[Zs(Z'c'c'' + Z''s's'') + Z'c(Z'c''s' + Z''c's'')]$$
$$+ Z\,Z_1''[Zs(Z's''c' + Z''c''s') + Z'c(Z's's'' + Z''c'c'')]$$
$$+ Z_0Z''[Zc(Z'c'c'' + Z''s's'') + Z's(Z's'c'' + Z''c's'')]$$
$$+ Z_0Z_1''[Zc(Z'c's'' + Z''c''s') + Z's(Z's's'' + Z''c'c'')]$$

On pourrait facilement former également I I′ I″ et vérifier la loi de

Digitized by Google

réciprocité ainsi que l'addition des arguments lorsque les lignes ont même caractéristique $Z = Z' = Z''$.

5°) Recherches des maxima et minima.

Les diverses formules qui viennent d'être établies montrent que l'impédance de la branche de transmission de même que l'impédance de la branche de réception figurent linéairement au dénominateur ou au numérateur des diverses fractions considérées. Soit u la grandeur physique envisagée, voltage ou intensité, et z l'impédance imaginaire de la branche de départ ou d'arrivée, on aura une expression de la forme :

$$u = \frac{a + bz}{c + dz}$$

a, b, c, d étant des imaginaires indépendantes de z.

Il en résulte que si z décrit un cercle, u décrira un cercle correspondant. Or z décrit un cercle, soit que son module soit constant, soit que son argument soit constant (car une droite est à envisager comme un cercle de rayon infini), soit que sa partie réelle ou sa partie imaginaire soit seule variable. Dans tous les cas, u décrit un cercle et par conséquent son module a un maximum et un minimum ; il faudra toutefois vérifier que ce maximum ou ce minimum correspond à une valeur de z admissible ; z doit en effet avoir toujours une partie réelle positive, car cette partie réelle représente la résistance ohmique.

VIII. — Ligne parcourue par un courant de pile.

Si dans les formules qui donnent V et I pour une ligne homogène, terminée par une branche de pile de résistance R_0 et une branche de récepteur de résistance R_1, on fait tendre ω vers zéro, la limite de $E_0 e^{i\omega t}$ étant E_0, on retombe sur la formule connue du régime permanent, pour une ligne imparfaitement isolée, parcourue par un courant de pile ; cette formule est la suivante :

$$V = E_0 \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}} \frac{\sqrt{\frac{\rho}{\sigma}} sh\sqrt{\rho\sigma}(l-x) + R_1 ch\sqrt{\rho\sigma}(l-x)}{\left(\frac{\rho}{\sigma} + R_0 R_1\right) sh\sqrt{\rho\sigma}\, l + \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}\left(R_0 + R_1\right) ch\sqrt{\rho\sigma}\, l}$$

Digitized by Google

IX. — Période variable.

Je suppose qu'à l'époque $t = o$, la ligne étant préalablement à l'état neutre, j'intercale une pile de force électromotrice constante E_0 soit

$$U = \frac{E\,Z}{\Delta}\Big(Z\,sh\,a\,(l-x) + Z_1\,ch\,a\,(l-x)\Big). \qquad E = E_0 e^{i\omega t}$$

$$J = \frac{E}{\Delta}\Big(Z\,ch\,a\,(l-x) + Z_1\,sh\,a\,(l-x)\Big)$$

la solution du régime périodique permanent ; je dis que la solution relative à la période variable sera :

$$V = \frac{1}{2\pi i}\int_{(L)} U\,\frac{d\omega}{\omega}.$$

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{(L)} J\,\frac{d\omega}{\omega}.$$

Dans ces formules, ω est une quantité imaginaire. Le contour d'intégration (L) doit être convenablement choisi dans le plan de la quantité imaginaire ω.

Ce contour comprendra :

1° L'axe réel, mais on évitera l'origine en la contournant par un petit demi-cercle ayant pour centre l'origine et laissant l'origine en dessus.

2° Une demi-circonférence (C) décrite dans le sens des angles croissants, ayant pour centre l'origine, commençant en A sur l'axe réel, sur la partie positive de cet axe, et finissant en A′ sur la partie négative de ce même axe.

Le rayon de cette demi-circonférence devra prendre des valeurs croissant indéfiniment, comme il sera expliqué ci-après.

Ces intégrales satisfont algébriquement aux équations différentielles courantes, elles satisfont également aux équations aux limites pour $x = o$ et pour $x = l$. Elles sont, en effet, la somme de parties

Digitized by Google

qui elles-mêmes satisfont à ces diverses conditions. Nous ne faisons, en effet, qu'ajouter les effets de diverses f. e. m. de la forme $\frac{1}{2\pi i} E_0 e^{i\omega t} \frac{d\omega}{\omega}$. Comme le contour (L) embrasse une seule fois l'origine, la somme des valeurs que prennent ces diverses f. e. m. le long dudit contour est égal à :

$$\frac{1}{2\pi i} \int E_0 e^{i\omega t} \frac{d\omega}{\omega} = E_0$$

c'est-à-dire à la f. e. m. constante considérée.

Il ne s'agit plus que de voir à quelles conditions initiales répond la solution envisagée.

Or on démontre que les intégrales V et I prises le long de la demi-circonférence (C) de rayon infini sont nulles. Il ne reste donc comme contour d'intégration que celui qui longe l'axe réel en contournant l'origine ; mais ce contour peut être complété par la demi-circonférence (C′) symétrique de (C). On a alors un contour fermé ; mais il est facile de voir qu'il ne contient à son intérieur aucun des pôles de la fonction méromorphe à intégrer. L'intégrale est donc nulle.

Or si on suppose $t = o$, l'intégrale prise le long de (C′) est également nulle, comme nous le démontrerons. Il en résulte que l'intégrale prise le long du contour (L) est nulle pour $t = o$, quel que soit x. Cela s'applique à V et à I.

Si on a $I = 0$ quel que soit x pour $t = 0$, on aura également $\frac{\partial I}{\partial x} = 0$ et par suite $\gamma \frac{\partial V}{\partial t} + \sigma V = 0$.

Mais on a, non seulement $I = 0$ mais $V = 0$ quel que soit x pour $t = 0$, on aura donc $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$.

De même comme on a $V = 0$ pour $t = 0$ quel que soit x, on a également : $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ et par suite : $\rho I + \lambda \frac{\partial I}{\partial t} = 0$; mais on a non seulement $V = 0$ mais encore $I = 0$ quel que soit x, pour $t = 0$, on aura donc : $\frac{\partial I}{\partial t} = 0$.

Digitized by Google

Ainsi pour $t = 0$ on a $I = 0$ $V = 0$ $\frac{\partial I}{\partial t} = 0$ $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ quel que soit x. La solution obtenue est donc la solution à partir du repos.

Nous allons reprendre les différents points de cette démonstration.

1° Nature de la fonction à intégrer.

La fonction à intégrer est une fonction méromorphe de ω. Il est vrai que a et Z sont des radicaux, mais il faut remarquer que si l'on développe Z sin hyp $a\ (l - x)$ et $\frac{\sin \text{hyp } a\ (l-x)}{Z}$, ces deux expressions sont de forme entière. Il en est de même de $ch\ a\ (l - x)$.

Or, on a :

$$U = E_0\, e^{i\omega t}.\ \frac{Z\, sh\, a\,(l-x) + Z_1\, ch\, a\,(l-x)}{(Z^2 + Z_0 Z_1)\,\frac{sh\, a l}{Z} + (Z_0 + Z_1)\, ch\, a l}$$

$$J = E_0\, e^{i\omega t}.\ \frac{ch\, a\,(l-x) + Z_1\,\frac{sh\, a\,(l-x)}{Z}}{(Z^2 + Z_0 Z_1)\,\frac{sh\, a l}{Z} + (Z_0 + Z_1)\, ch\, a l}$$

Donc U et J ne contiennent plus aucun radical ; ce sont des fonctions méromorphes ; on peut donc appliquer le théorème des résidus de Cauchy aux fonctions $\frac{U}{\omega}$ et $\frac{J}{\omega}$.

2° Racines de $\Delta = 0$.

L'équation $\Delta = 0$ peut s'écrire :

$$Z^2 + Z_0 Z_1 + (Z_0 + Z_1).\ \frac{ch\, a l}{\frac{sh\, a l}{Z}} = 0$$

ou

$$\frac{r}{s} + Z_0 Z_1 + (Z_0 + Z_1).\ \frac{a l}{s l}.\ \frac{ch\, a l}{sh\, a l} = 0$$

Digitized by Google

mais on a :

$$al\,\frac{ch\,al}{sh\,al} = \frac{al}{i}\,\frac{\cos\frac{al}{i}}{\sin\frac{al}{i}} = 1 + 2\sum_n \frac{a^2 l^2}{1 + \frac{a^2 l^2}{n^2\pi^2}}$$

Si nous posons :

$$\rho l = R \quad \lambda l = L \quad \sigma l = S \quad \gamma l = C \quad i\omega = \alpha$$

$$P = (R + L\alpha)\alpha^2 + (S + C\alpha)\left(\frac{1}{C_0} + R_0\alpha + L_0\alpha^2\right)\left(\frac{1}{C_1} + R_1\alpha + L_1\alpha^2\right)$$

$$Q = \left(\frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1}\right)\alpha + (R_0 + R_1)\alpha^2 + (L_0 + L_1)\alpha^3$$

Cette équation s'écrira :

$$P + Q\left(1 + 2\sum_n \frac{(R + L\alpha)(S + C\alpha)}{1 + \frac{(R + L\alpha)(S + C\alpha)}{n^2\pi^2}}\right) = 0$$

Occupons-nous tout d'abord des racines de cette équation dont le module est très grand. Dans ce cas : P et Q $(R + L\alpha)(S + C\alpha)$ sont du même ordre de grandeur et leur rapport tend vers une quantité fixe M. Si je pose $X = (R + L\alpha)(S + C\alpha)$, l'équation se réduira sensiblement à :

$$M + \frac{1}{X} + 2\sum \frac{1}{1 + \frac{X}{n^2\pi^2}} = 0$$

Les quantités $-n^2\pi^2$ séparent les différentes racines en X ; à chacune de celles-ci correspondent deux racines en α données par l'équation : $X = RS + (LS + CR)\alpha + LC\alpha^2$. On voit que la partie réelle de ces racines est négative et égale à $-\frac{LS + CR}{2LC}$. On voit aussi que ces racines forment une série de points entre lesquels il est facile de faire passer différentes circonférences de rayon indéfiniment croissant ayant leur centre à l'origine, de façon à

Digitized by Google

éviter les pôles des fonctions U et J. Ce sont là les différentes circonférences (C) et C') qu'il convient d'envisager dans la démonstration.

3° On peut aller plus loin et démontrer que toutes les racines de Δ sont au-dessus de l'axe réel. Il s'agit là des valeurs de ω qui annulent Δ. Il reviendrait au même de dire que la valeur correspondante de $\alpha = i\omega$ a sa partie réelle négative.

Considérons, à cet effet, la fonction :

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int f(\omega) \frac{e^{i\omega t}}{\Delta} \left[Z\, sh\, a(l-x) + Z_1\, ch\, a(l-x) \right] d\omega.$$

Quel que soit le contour d'intégration, ce sera une solution satisfaisant aux équations courantes et aux équations aux limites. Cette fonction représentera l'intensité résultant de la superposition des effets dus aux f. e. m. élémentaires : $\frac{1}{2\pi i} f(\omega)\, d\omega\, e^{i\omega t}$.

Si la fonction $f(\omega)$ n'a pas de pôle à l'intérieur du contour d'intégration, on aura : $\frac{1}{2\pi i} \int f(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = 0$, et par suite la f. e. m. totale en cause étant nulle, on aura le courant dû simplement à des conditions initiales particulières, le système partant d'un certain état de mouvement et étant ensuite abandonné à lui-même sans intervention d'une f. e. m. Cela aura lieu en particulier si le contour d'intégration entoure une des racines de Δ et une seule. La solution, dans ce cas, sera en vertu du théorème des résidus de la forme

$$e^{\alpha t}\, F(\alpha, x).$$

α étant une des valeurs de $i\omega$ qui annule Δ.

Si l'état de repos est un état d'équilibre stable et si on suppose que l'état initial soit peu différent de l'état de repos, le système devra revenir au repos. Il faut donc que la partie réelle de α soit négative. C'est là une nécessité physique ; mais on peut donner une autre démonstration de ce fait.

Digitized by Google

4° Nous devons à cet égard revenir sur la façon d'établir les équations du problème.

Je dis qu'elles peuvent être obtenues en écrivant que la variation de la fonction W ci-après définie est nulle.

Dans l'expression de cette fonction, nous employons les notations suivantes :

$$A_0 = \frac{1}{C_0} + R_0 \alpha + L_0 \alpha^2$$

$$A_1 = \frac{1}{C_1} + R_1 \alpha + L_1 \alpha^2$$

les quantités I J et J′ sont des variables liées entre elles par les deux relations :

$$\frac{\partial I}{\partial x} dx + J + J' = 0 \qquad \frac{1}{\gamma} J' = \frac{\alpha}{\sigma} J$$

enfin I_0 et I_1 sont les valeurs prises par I pour $x = 0$ et pour $x = l$ respectivement.

La fonction W qu'il s'agit de définir est alors la suivante :

$$2W = \int_0^l \left[(\alpha \rho + \alpha^2 \lambda)\, dx\, I^2 + \frac{\alpha}{\sigma dx} J^2 + \frac{1}{\gamma dx} J'^2 \right] + A_0 I_0^2 + A_1 I_1^2.$$

On en déduit :

$$\delta W = \int_0^l \left[(\alpha \rho + \alpha^2 \lambda)\, dx\, I\, \delta I + \frac{\alpha}{\sigma dx} J\, \delta J + \frac{1}{\gamma dx} J' \delta J' \right] + A_0 I_0\, \delta I_0 + A_1 I_1\, \delta I_1$$

Or, on a :

$$\frac{J}{\sigma} = \frac{J'}{\alpha\gamma} = \frac{-\frac{\partial I}{\partial x} dx}{\sigma + \alpha\gamma}$$

ce qui permet de calculer δJ et $\delta J'$ et d'en reporter la valeur dans la quantité entre crochets ; celle-ci devient :

$$\left[(\alpha \rho + \alpha^2 \lambda) I\, \delta I + \frac{\alpha}{\sigma + \alpha\gamma} \cdot \frac{\partial I}{\partial x}\, \delta \frac{\partial I}{\partial x} \right] dx$$

Digitized by Google

En intervertissant les symboles δ et $\frac{\partial}{\partial x}$ et en appliquant l'intégration par parties, il vient :

$$\delta W = \int dx \left[(\alpha\rho + \alpha^2\lambda) I - \frac{\alpha}{\sigma + \alpha\gamma} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \right] \delta I$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{\sigma + \alpha\gamma} \frac{\partial I_1}{\partial x} + A_1 I_1 \right) \delta I_1 + \left(- \frac{\alpha}{\sigma + \alpha\gamma} \frac{\partial I_0}{\partial x} + A_0 I_0 \right) \delta I_0$$

Si donc nous annulons les coefficients des variations indépendantes δI, δI_0 et δI_1, il reste les trois équations en α :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = (\rho + \alpha\lambda)(\sigma + \alpha\gamma) I$$

$$\frac{\alpha}{\sigma + \alpha\gamma} \frac{\partial I_0}{\partial x} = A_0 I_0$$

$$\frac{\alpha}{\sigma + \alpha\gamma} \frac{\partial I_1}{\partial x} = - A_1 I_1$$

Or il est facile de comparer ces équations avec celles du problème, qui sont :

$$- \frac{\partial V}{\partial x} = \rho I + \lambda \frac{\partial I}{\partial t}$$

$$- \frac{\partial I}{\partial x} = \sigma V + \gamma \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (E - V_0) = \frac{1}{C_0} I_0 + R_0 \frac{\partial I_0}{\partial t} + L_0 \frac{\partial^2 I_0}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = \frac{1}{C_1} I_1 + R_1 \frac{\partial I_1}{\partial t} + L_1 \frac{\partial^2 I_1}{\partial t^2}.$$

Faisons l'hypothèse $E = 0$; éliminons V entre les deux premières équations, on a :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \left(\sigma + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\rho + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) I$$

Digitized by Google

Opérons par $\sigma + \gamma \frac{\partial}{\partial t}$ sur les deux dernières équations, il vient :

$$\left(\sigma + \gamma \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{C_0} + R_0 \frac{\partial}{\partial t} + L_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) I_0 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial I_0}{\partial x}$$

$$\left(\sigma + \gamma \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{C_1} + R_1 \frac{\partial}{\partial t} + L_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) I_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial I_1}{\partial x}$$

Les trois dernières équations ne sont autres que les trois équations en α, si on y remplace le symbole α par $\frac{\partial}{\partial t}$.

Cela étant, considérons α comme une fonction définie par l'équation :

$$\int_0^l \left[(\alpha\rho + \alpha^2\lambda)\, dx\, I^2 + \frac{\alpha}{\sigma dx} J^2 + \frac{1}{\gamma dx} J'^2\right] + A_0 I_0^2 + A_1 I_1^2 = 0$$

laquelle est du second degré en α et à termes positifs, il en résulte que α est une quantité à partie réelle négative.

Or les trois équations en α qui viennent d'être obtenues en dernier lieu, sont celles qui expriment que, sous les conditions données, α est minimum ou maximum.

On a, en effet, puisque $W = 0$,

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial I} \delta I + \frac{\partial W}{\partial J} \delta J + \frac{\partial W}{\partial J'} \delta J' + \frac{\partial W}{\partial \alpha} \delta \alpha = 0$$

et d'autre part, on a également :

$$\frac{\partial W}{\partial I} \delta I + \frac{\partial W}{\partial J} \delta J + \frac{\partial W}{\partial J'} \delta J' = 0,$$

si α satisfait aux trois équations en α qui expriment comme on vient de le voir que δW est nul, sous les conditions admises.

Il en résulte que l'on a $\delta \alpha = 0$

Cela prouve que les valeurs de α qui satisfont aux trois équations en α sont des valeurs pour lesquelles la fonction α considérée a une variation nulle. Et comme cette fonction α est à partie réelle

Digitized by Google

négative, les valeurs de α qui satisfont aux trois équations en α considérées sont à partie réelle négative.

Mais si l'on a une solution quelconque de la forme $e^{\alpha t} F(\alpha, x)$ pour les équations différentielles considérées, la valeur correspondante de α devra satisfaire aux trois équations en α.

Mais les solutions de cette forme sont telles que α est une racine de Δ (considéré comme fonction de $i\omega = \alpha$).

Donc les racines en α de Δ sont à partie réelle négative. Les racines en ω sont au-dessus de l'axe réel.

On peut donc bien, en appliquant le théorème des résidus au contour constitué par l'axe des x et les cercles (C'), écrire que la somme de ces résidus est égale à zéro.

4° Il ne nous reste plus qu'à montrer quelle est la valeur des intégrales prises le long des demi-circonférences (C) et (C') de rayon infiniment grand.

Nous examinerons donc les valeurs asymptotiques de U_1 et J_1

$$U_1 = \frac{Z(Z+Z_1)e^{a(l-x)} + Z(Z_1-Z)e^{-a(l-x)}}{(Z+Z_0)(Z+Z_1)e^{al} + (Z_1-Z)(Z-Z_0)e^{-al}}$$

$$J_1 = \frac{(Z+Z_1)e^{a(l-x)} + (Z-Z_1)e^{-a(l-x)}}{(Z+Z_0)(Z+Z_1)e^{al} + (Z_1-Z)(Z-Z_0)e^{-al}}$$

Dans ces formules $a = \sqrt{(\rho+\lambda\omega i)(\sigma+\gamma\omega i)}$ est une fonction de ω ; Z, Z_0, Z_1 sont aussi des fonctions de ω, mais sans exponentielles. Quand le module de ω est infiniment grand, on a sensiblement $a = \omega i\sqrt{\gamma\lambda}$. D'ailleurs, nous avons déjà remarqué précédemment que l'on peut prendre la valeur arithmétique du radical. Nous supposons maintenant que l'affixe de ω décrive le cercle (C) de rayon infiniment grand. Les termes prépondérants seront ceux en $e^{-a(l-x)}$ au numérateur et e^{-al} au dénominateur. Il viendra donc :

$$U_1 = \backsim \frac{Z}{Z-Z_0} \cdot \frac{e^{-a(l-x)}}{e^{-al}} = \backsim \frac{Z}{Z-Z_0} \cdot e^{ax} = \backsim \frac{Z}{Z-Z_0} e^{\omega i\sqrt{\gamma\lambda}\, x}$$

$$J_1 = \backsim -\frac{1}{Z-Z_0} e^{\omega i\sqrt{\gamma\lambda}\, x} .$$

le signe $\backsim$ signifiant une valeur asymptotique.

Digitized by Google

Soit $\omega = R e^{i\varphi}$ on aura $\frac{d\omega}{\omega} = i d\varphi$ et le module de $\int_{(c)} \frac{U}{\omega} d\omega$ sera plus petit que

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\varphi(t+x\sqrt{\gamma\lambda})} \left|\frac{Z}{Z-Z_0}\right| d\varphi < \pi \max. \left| e^{-R\sin\varphi(t+x\sqrt{\gamma\lambda})} \times \frac{Z}{Z-Z_0}\right|$$

Cette quantité tend vers zéro, quand R croît indéfiniment, φ étant positif ainsi que $t + x\sqrt{\gamma\lambda}$. On verrait de même que :

$$\int_{(c)} \frac{J}{\omega} d\omega$$

tend vers zéro dans les mêmes conditions. La valeur $\varphi = 0$ devrait être exceptée mais elle correspond à un champ d'intégration infiniment petit.

Considérons maintenant les valeurs asymptotiques de U_1 et de J_1 le long du demi-cercle (C') au-dessous de l'axe des quantités réelles. En ce cas les termes prépondérants sont $e^{a(l-x)}$ au numérateur et e^{al} au dénominateur. Et la valeur asymptotique des deux intégrales considérées sera :

$$\text{mod.} \int_{(c')} \frac{U}{\omega} d\omega < \text{mod} \int_0^{\pi} \left|\frac{Z}{Z+Z_0}\right| \times \left| e^{i\omega(t-x\sqrt{\gamma\lambda})}\right| \times d\varphi < \max \left| \frac{Z}{Z+Z_0} \times e^{R\sin\varphi(t-x\sqrt{\gamma\lambda})}\right|$$

$$\text{mod.} \int_{(c')} \frac{J}{\omega} d\omega < \pi \max. \left| \frac{1}{Z-Z_0} \times e^{R\sin\varphi(t-x\sqrt{\gamma\lambda})}\right|$$

On voit par là que pour $t = 0$ ou plus généralement pour $x > \frac{t}{\sqrt{\gamma\lambda}}$, ces deux intégrales seront nulles le long du cercle infiniment grand (c').

Ainsi, en un point x, V et I restent nuls jusqu'à l'époque $t = x\sqrt{\gamma\lambda}$. La solution considérée est donc bien celle qu'on doit avoir à partir du repos. La vitesse de propagation de la tête du courant est $\frac{1}{\sqrt{\gamma\lambda}}$.

Digitized by Google

Tous les points sur lesquels nous nous étions appuyés dans la démonstration se trouvent ainsi établis.

Pour avoir l'expression analytique de la solution, il suffit de prendre les divers résidus de $\frac{U}{\omega}$ et $\frac{I}{\omega}$. Le résidu pour $\omega = 0$ c'est-à-dire pour une pulsation infiniment lente correspond à la solution qui définit le régime permanent.

X. — Cas d'une ligne mise à la terre à son extrémité avec une pile sans résistance intérieure, à son origine.

Nous supposons que la ligne est très bien isolée $\sigma = o$, et que les impédances Z_1 et Z_0 des branches de réception et de transmission sont nulles. $Z_0 = o$ $Z_1 = o$. La solution est donc :

$$V = \frac{E_0}{2\pi i} \int \frac{e^{i\omega t}}{\omega} \cdot \frac{sh\,a(l-x)}{sh\,al}\, dx$$

avec $al = \sqrt{-LC\omega^2 + RC\omega i}$

En dehors du pôle $\omega = o$, on a les pôles (d'ordre n) :

$$\omega'_n = -\frac{R}{2L} i + \delta_n \qquad \omega''_n = \frac{R}{2L} i - \delta_n \qquad \left(\delta_n = \sqrt{-\frac{R^2}{4L^2} + \frac{n^2\pi^2}{LC}}\right).$$

Le résidu pour $\omega = o$ est $E_0\left(1 - \frac{x}{l}\right)$. Formons la somme des résidus pour ω'_n et ω''_n. Pour les petites valeurs de n, δ_n peut être purement imaginaire, mais à partir d'un certain rang n, δ_n est réel. Bornons-nous au cas où δ_n est réel : s'il était imaginaire, il suffirait de remplacer convenablement les sinus et cosinus qui vont être introduits par les sin. et cos. hyperboliques correspondants.

La somme des résidus pour ω'_n et ω''_n est :

$$E_0 \frac{sh\,a(l-x)}{ch\,al} \left(\frac{e^{i\omega' n t}}{\omega'_n \frac{d\,al}{d\,\omega'_n}} + \frac{e^{i\omega'' n t}}{\omega''_n \frac{d\,al}{d\,\omega''_n}} \right)$$

Digitized by Google

mais on a :

$$sh\,al = i \sin \frac{al}{i} = i \sin n\pi = 0$$

$$ch\,al = \cos \frac{al}{i} = \cos n\pi = (-1)^n$$

$$sh\,a(l-x) = shal\,chax - shax\,chal = -i\,(-1)^n \sin \frac{n\pi x}{l};$$

$$\frac{dal}{d\omega} = \frac{-2\,LC\omega + RCi}{2\sqrt{-LC\omega^2 + RC\omega i}} \quad \frac{dal}{d\omega'_n} = \frac{-2\,LC\delta_n}{2n\pi i} \quad \frac{dal}{d\omega''_n} = \frac{LC\delta_n}{n\pi i}$$

$$-\frac{e^{i\omega' t}}{\omega'} + \frac{e^{i\omega'' t}}{\omega''} = \frac{2}{\omega'\,\omega''}\left(\frac{\omega' - \omega''}{2} \cdot \frac{e^{i\omega' t} + e^{i\omega'' t}}{2} - \frac{\omega' + \omega''}{2} \cdot \frac{e^{i\omega' t} - e^{i\omega'' t}}{2}\right)$$

Il vient, alors, toutes réductions faites :

$$\frac{V}{E_0} = 1 - \frac{x}{l} - 2\sum_n \frac{1}{n\pi\delta_n} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \left(\delta_n \cos \delta_n t + \frac{R}{2L} \sin \delta_n t\right).$$

XI. — Nous n'ajouterons qu'une remarque très simple relative au cas d'un câble parfaitement isolé ($\sigma = o$), bloqué par des condensateurs ; c'est que le résidu pour $\omega = o$ donne bien :

$$v = E_0 \frac{\dfrac{1}{C_1 C}}{\dfrac{1}{C_1 C_0} + \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_0}\right)}$$

valeur qui vérifie l'équation bien connue :

$$C_0 (E_0 - v) = (C + C_1)\, v$$

de la répartition des charges.

L'éditeur-gérant,
A. DUMAS.

LILLE, IMPRIMERIE L. DANEL.

Digitized by Google